

Varianta 1 online

Indicații și răspunsuri

- Răspuns corect:** d)
Indicații: Îndeplinesc condiția cerută expresiile 1, 2 și 4
- Răspuns corect:** f)
Indicații: două drepte paralele au aceeași pantă
- Răspuns corect:** e) $a+b+c-f(a, f(c, b))$
Indicații: $a+b+c-\max(a, b, c) = a+b+c-\max(a, \max(b, c))$
- Răspuns corect:** a) $-1 \ 2 \ 2 \ -1 \ -1 \ 1$
Indicații: Mecanismul de transmiterea parametrilor.
- Răspuns corect:** e) 152004
Indicații: Se mută grupurile de câte 2 cifre. Datorită numărului impar de cifre a lui n , în m apare o cifră în plus.
- Răspuns corect:** d) 10239
Indicații: Algoritmul determină baza minimă x în care îl consideră pe n -ul inițial și îl transformă în baza 10
- Răspuns corect:** e)
Indicații: Linia $n-j+1$ din matricea a devine coloana j în matricea b
- Răspuns corect:** c)
- Răspuns corect:** b)
Indicații: Indicii sunt de la 1 la n ; parcurgere liniară a vectorului.
- Răspuns corect:** f) Inserează șirul t în șirul s , începând cu poziția k
- Răspuns corect:** a) 0
Indicații: Graful este tare conex
- Răspuns corect:** f) $(1, 3, 5, 2, 1, 2)$
Indicații: $(3, 2, 1, 5, 1, 1)$ – are număr impar de noduri de grad impar
 $(5, 1, 6, 4, 5, 3)$ și $(1, 1, 1, 1, 1, 6)$ – au un nod cu grad prea mare
 $(1, 1, 1, 1, 2, 2)$ – nu poate fi conex deoarece are doar 4 muchii
 $(2, 1, 3, 1, 0, 1)$ are un nod izolat
- Răspuns corect:** b) 8
Indicații: $3n+2 \leq n(n-1)/2$

14. **Răspuns corect:** c) 3

Indicații: Numerele 12, 16 și 18 generează arbori cu 8 frunze

15. **Răspuns corect:** d) 25

Indicații: $C_5^2 + C_5^3 + C_5^4$

Varianta 2 online

Indicații și răspunsuri

1. **Răspuns corect:** e)
2. **Răspuns corect:** b)
Indicații: Operatorul % (mod) nu funcționează pe tipul real
3. **Răspuns corect:** c) `dmtx`
Indicații: La ștergerea unei litere, vecina din dreapta îi va lua locul și nu va mai fi eliminată
4. **Răspuns corect:** d) Graful G conține cel puțin un ciclu
Indicații: Graful aciclic maximal cu **100** de noduri este un arbore și are **99** de muchii.
5. **Răspuns corect:** d) **30**
Indicații: Numarul de valori **1** din matricea de adiacență este egal cu numărul de arce
6. **Răspuns corect:** e) **5**
Indicații: Nodurile terminale au gradul **1**, restul nodurilor având gradul **3**
7. **Răspuns corect:** b)
8. **Răspuns corect:** a) (1, 21, 13, 23, 33, 17, 27)
Indicații: Șirul trebuie să fie sortat în funcție de cifra unităților
9. **Răspuns corect:** c)
10. **Răspuns corect:** b) **12**
11. **Răspuns corect:** a) **3** și **3**
Indicații: Parametrul transmis prin valoare nu se modifică, pe când cel transmis prin referință da.
12. **Răspuns corect:** a)
Indicații: Atribuirea este corectă între două variabile de același tip RECORD/struct
13. **Răspuns corect:** e) **15**
Indicații: Matricea de adiacență are valori **0** pe diagonala principală. Dintre celelalte **6** elemente, **4** trebuie să conțină valori **1**, ordinea nefiind importantă. Așadar numărul de grafuri este C_6^4 .
14. **Răspuns corect:** e)
15. **Răspuns corect:** b) Graful G este un graf hamiltonian

Varianta 3 online

Indicații și răspunsuri

- Răspuns corect c) 2**
Indicații: corecte sunt variantele 3 și 4
- Răspuns corect e) 2 14**
- Răspuns corect e) 112**
- Răspuns corect b) 2 4 6**
- Răspuns corect a) 4**
6 3
- Răspuns corect c) neenUB**
- Răspuns corect d) 1225**
Indicații: $49+48+\dots+1=50 \cdot 49/2=1225$ (suma Gauss)
- Răspuns corect b) dcafe ;**
dcbafe
- Răspuns corect f) 350**
Indicații: meniu= felul întâi + felul doi sau
meniu= felul întâi + felul doi + desert
- Răspuns corect c) 31**
Indicații: Graful dat are 14 muchii. K_{10} are 45 muchii. $45-14=31$ muchii trebuie adăugate pentru a obține un K_{10}
- Răspuns corect a) 0**
- Răspuns corect f) 30**
Indicații: Într-un arbore binar se face diferența între fiul stâng și fiul drept. Sunt 5 configurații posibile * 6 etichetări diferite=30 cazuri
- Răspuns corect b) 5**
Indicații: descendenții nodului 4 sunt: **3, 6, 11, 13, 15**
- Răspuns corect d) $5^2 \cdot 2^{276}$**
Indicații: Fie n numărul de noduri din graf. Un nod este izolat și cu restul se construiesc grafuri neorientate cu $n-1$ noduri ($2^{(n-1) \cdot (n-2)/2}$ cazuri). Orice nod poate fi ales ca nod izolat. Total grafuri neorientate $n \cdot 2^{(n-1) \cdot (n-2)/2}$.
- Răspuns corect c) $p \cdot n^3$**

Varianta 4 online

Indicații și răspunsuri

1. **Răspuns corect c) 3**
2. **Răspuns corect d) 3 1**
3. **Răspuns corect a) 5 30**
5 70
4. **Răspuns corect b) 2600**
5. **Răspuns corect c) 8 11 14**
6. **Răspuns corect e) EBPU-UPB**
7. **Răspuns corect d) 4950**

Indicații: $(n-1)+(n-2)+\dots+1=n*(n-1)/2$ (suma Gauss), unde n este numărul de elemente al tabloului unidimensional

8. **Răspuns corect b) 13122**
Indicații: $2 \cdot 3^8 \cdot 1$
9. **Răspuns corect a) 1212; 4322**
10. **Răspuns corect b) 15**
11. **Răspuns corect c) 50**
12. **Răspuns corect d) 50**

Indicații: Pentru ca arborele binar să aibă înălțime minimă se ocupă fiecare nivel x cu câte 2^x noduri, unde x este de la 0 la 5 (rădăcina este pe nivelul 0). Pe nivelul 5 avem 32 frunze. S-au folosit $2^6 - 1 = 63$ noduri. Pe nivelul 6 se adaugă încă 37 de noduri. Astfel, deduc că rămân 13 frunze pe nivelul 5, deoarece 18 noduri au câte doi fii și un nod are un fiu ($32 - 18 - 1 = 13$ frunze), iar pe nivelul 6 sunt 37 frunze. Total: 50 frunze.

13. **Răspuns corect d) 5**
Indicații: $L_1: 10, 1, 5, 7$; $L_2: 10, 1, 5, 12$; $L_3: 10, 4, 3, 11$;
 $L_4: 10, 4, 3, 13$; $L_5: 10, 4, 3, 15$;
14. **Răspuns corect d) $5^2 \cdot 2^{552}$**

Indicații: Fie n numărul de noduri din graf. Un nod este izolat și cu restul se

construiesc grafuri orientate cu $n-1$ noduri ($2^{(n-1) \cdot (n-2) / 2}$ cazuri = $2^{(n-1) \cdot (n-2)}$ cazuri). Orice nod poate fi ales ca nod izolat. Total grafuri orientate $n \cdot 2^{(n-1) \cdot (n-2)}$

15. **Răspuns corect a) O (n)**

Varianta 5 online

Indicații și răspunsuri

- Răspuns corect:** b) două apeluri
Indicații: $f(720, 2)$ și $f(120, 1)$.
- Răspuns corect:** b) **c, a**
Indicații: În stivă se rețin valorile variabilelor locale (variabila **a**) și valorile parametrilor transmiși prin valoare (variabila **c**).
- Răspuns corect:** c) $O(n^2)$
- Răspuns corect:** b) **Limbaajul C/C++: $!(x*y+y-3*x-3)>=0$**
Limbaajul Pascal: $NOT(x*y+y-3*x-3 > = 0)$
Indicații: $x>-1$ și $y<3$ implică $(x+1)(y-3)<0$ echivalent cu $xy+y-3x-3<0$ echivalent cu $!(x*y+y-3*x-3)>=0$ în limbajul C++, respectiv $NOT(x*y+y-3*x-3)>=0$ în limbajul Pascal.
- Răspuns corect:** a) **3**
Indicații: $\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 4, 5\}, \{0, 2, 3, 5\}$
- Răspuns corect:** b) **aib**
Indicații: Soluțiile care au două vocale în ordinea generării sunt: abe, abi, abu, ace, aci, acu, aeb, aec, **aib**, aic, aie
- Răspuns corect:** c) **7**
Indicații: $2+2+2+2+2+2; 2+2+2+3+3; 2+2+3+5; 2+3+7; 2+5+5; 3+3+3+3; 5+7$
- Răspuns corect:** a) $\{biologie, mate, info\};$
Indicații: Soluțiile în ordinea generării sunt: $\{fizica, biologie, chimie\}; \{fizica, biologie, mate\}; \{fizica, biologie, info\}; \{fizica, chimie, mate\}; \{fizica, chimie, info\}; \{fizica, mate, info\}; \{biologie, chimie, mate\}; \{biologie, chimie, info\}; \{biologie, mate, info\}; \{chimie, mate, info\}$
- Răspuns corect:** c) 2^k
- Răspuns corect:** a) **linia 5, coloana 7**
Indicații: Elementul de pe linia **i**, coloana **j** are valoarea $(i-1)m+j$. $123=3m+3$ deci $m=40$. Prin urmare sunt **40** elemente pe o linie $167=40*4+7$. Deci $i=5, j=7$.
- Răspuns corect:** e) **n**
Indicații: Cazul cel mai defavorabil este atunci când **n** este număr prim. În acest caz, în afara structurii repetitive sunt **2** instrucțiuni de atribuire iar în cadrul structurii repetitive sunt **n-2** instrucțiuni de incrementare. În total **n** instrucțiuni.
- Răspuns corect:** e) **2 4 6**
- Răspuns corect:** b) **4 4 3**
Indicații: Subprogramul calculează recursiv $x_1^n + x_2^n$ unde $s=x_1+x_2$ iar $p=x_1*x_2$. Prin urmare $x_1^4 + x_2^4=82$ dacă $x_1+x_2=4$ și $x_1*x_2=3$, atunci $x_1=3$ și $x_2=1$ deci $3^4+1=82$.
- Răspuns corect:** b) $n=6$; $k=1$
Indicații: Se construiește un tablou bidimensional care are elemente cu valoarea **1** pe primele **k** diagonale paralele cu cele două diagonale, în rest, elemente cu valoarea **2**.
- Răspuns corect:** c) $\alpha=j$; $\beta=4-j-k$

Varianta 6 online

Indicații și răspunsuri

- Răspuns corect:** c) $b+a/10!=b\%c*a/c$ (limbaj C++/C)
 $b+a \text{ div } 10 <> b \text{ mod } c * a \text{ div } c$ (limbaj Pascal)
- Răspuns corect:** f) 11
Indicații: suma gradelor trebuie să fie un număr par. Pentru $n=13$ și $d=11$ suma gradelor ar fi 143.
- Răspuns corect:** c) 7
Indicații: $i=1; i=2; i=4; i=8; i=16; i=32; i=64$
- Răspuns corect:** e) 8
Indicații: se elimină cifrele, dar nu cele care sunt precedate de o cifră ștersă
- Răspuns corect:** b) $n*(n-1)/2$
Indicații: se execută $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$ comparații
- Răspuns corect:** c) -4
Indicații: $x=15; x=14; x=7; x=2; x=1; x=-4;$
- Răspuns corect:** d) 13
Indicații: Se generează: 1003, 1012, 1021, 1030, 1102, 1111, 1120, 1201, 1210, 1300, 2002, 2011, 2020
- Răspuns corect:** a) suma elementelor de sub diagonala principală exclusiv elementele diagonalei principale
- Răspuns corect:** e) $h.g.c[2]$
- Răspuns corect:** e) 1, 4, 5, 6, 8
Indicații: lanțurile elementare de lungime 3 sunt: (1,2,3,4), (1,2,3,6) (1,2,7,5) (8,2,3,4) (8,2,3,6) (8,2,7,5) (3,2,7,5) (6,3,2,7) (4,3,2,7)
Nodurile 1, 4, 5, 6 și 8 apar în câte 3 lanțuri elementare, celelalte noduri apar de mai multe ori.
- Răspuns corect:** f) 6 3 1 3 2 1
Indicații: Primul "for" atribuie tabloului: 0 5 1 3 2 1
 $a[a[6]]=2*6\%7$ $a[1]=5$
 $a[a[5]]=2*5\%7$ $a[2]=3$

$$a[a[4]] = 2 * 4 \% 7 \quad a[3] = 1$$

$$a[a[3]] = 2 * 3 \% 7 \quad a[1] = 6$$

12. **Răspuns corect: c) $s(2020, 2) = 4$** și reprezintă suma exponenților divizorilor primi din descompunerea în factori primi a numărului 2020

13. **Răspuns corect: d) 1792**

Indicații: Sunt $2^6 = 64$ grafuri cu 4 noduri (nodurile 3, 4, 5, 6).

Dacă există muchia [1, 2] atunci 2 se conectează cu 3 sau 4 sau 5 sau 6. Deci în acest caz avem **4 variante**.

Dacă 1 se conectează cu 3 sau 4 sau 5 sau 6 atunci și 2 se conectează cu **două** dintre nodurile 3, 4, 5, 6. În acest caz avem $4 * 6 = 24$ **variante**.

În total avem $4 + 24 = 28$ variante de conectare pentru 1 și 2. În total avem $28 * 64 = 1792$ grafuri cu proprietatea cerută.

14. **Răspuns corect: f) 3 11 2 2 10 2 1 9 2 1 6**

15. **Răspuns corect: f)** Aplicând metoda de sortare prin inserție se poate obține ca etapă intermediară tabloul $v = (1, 3, 4, 2, 5, 7, 6)$

Indicații: Dacă se parcurge tabloul de la primul element la ultimul, prin inserție avem: $(2, 3, 4, 5, 1, 7, 6)$ $(1, 2, 3, 4, 5, 7, 6)$ $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

Bubble Sort:

prima traversare: se schimbă 4 cu 2, 5 cu 1, 7 cu 6 și se obține tabloul $(3, 2, 4, 1, 5, 6, 7)$; a doua traversare: se schimbă 3 cu 2, 4 cu 1 și se obține tabloul $(2, 3, 1, 4, 5, 7)$; a treia traversare: se schimbă 3 cu 1 și se obține tabloul $(2, 1, 3, 4, 5, 6, 7)$; a patra traversare: se schimbă 2 cu 1 și se obține tabloul sortat

b) interclasare: dacă se interclasează $(2, 3, 4, 5)$ cu $(1, 6, 7)$, se compară 1 cu 2 și 1 devine primul în tablou, apoi 2 cu 6, 3 cu 6 etc.

Dacă se interclasează $(2, 3, 4)$ cu $(1, 5, 6, 7)$ se compară 1 cu 2 și 1 devine primul în tablou, apoi 2 cu 5, 3 cu 5 etc.

c) prin selecția minimului/maximului se fac cel mult $n-1$ interschimbări

d) la prima parcurgere se compară 3 cu 2 și minimul devine 2. Tabloul devine $(1, 4, 2, 5, 3, 7, 6)$. La a doua parcurgere minimul inițial este 4, apoi devine 2 și se compară cu 3, iar 2 este plasat pe a doua poziție a tabloului.

e) După prima traversare se obține tabloul $(3, 2, 4, 1, 5, 6, 7)$

Varianta 7 online

Indicații și răspunsuri

- Răspuns corect:** d) număr natural impar de o singură cifră
Indicații: $n \% 2 == 1$ este adevărată pentru numere naturale impare
- Răspuns corect:** f) $i + j = n + 1$
- Răspuns corect:** d) este hamiltonian dar nu eulerian
Indicații: fiecare nod are gradul 9, care nu este un număr par
- Răspuns corect:** c) $a[i] - a[i-1] != d$ (C++/C) respectiv $a[i] - a[i-1] <> d$ (Pascal)
- Răspuns corect:** b) 2
Indicații: cele mai lungi lanțuri elementare sunt (5, 7, 2, 3, 6), (5, 7, 2, 3, 4) și au în mijloc nodul 2
- Răspuns corect:** a) 1326
Indicații: se compară la fiecare pas ultima cifră a numărului **a** cu ultima cifră a numărului **b** și cea mai mică dintre acestea este adăugată numărului **p**.
 $a = 11357$
 $b = 1426$
- Răspuns corect:** c) 19
Indicații: se determină maxim pentru toți indicii, mai puțin pentru ultimul indice
- Răspuns corect:** c) orientat cu 4 noduri și 6 arce
Indicații: Matricea are 4 linii și 4 coloane, deci graful are 4 noduri. Matricea nu este simetrică, deci nu este graf neorientat. Are 6 elemente nenule, deci are 6 arce.
- Răspuns corect:** e) **noram** și **nramo**
Indicații: după ordonarea alfabetică a literelor cuvântului **roman** se obține **amnor**. Dacă nu le ordonează și consideră ca primă soluție cuvântul dat se obține răspunsul **a**
- Răspuns corect:** c) o rama alba
Indicații: Se elimină spațiile din șir și se verifică dacă este palindrom. Singurul care nu este palindrom este **oramaalba**
- Răspuns corect:** d) 14
Indicații: $f(3) = f(2) + 2 * f(0) = 3 + 2 * 1 = 5$

$f(2) = f(1) + 2 * f(-1) = 1 + 2 = 3$ deci $f(3)$ are 4 apeluri

$f(5) = f(4) + 2 * f(2)$ $f(2) = f(1) + 2 * f(-1)$

$f(4) = f(3) + 2 * f(1)$ $f(3) = f(2) + 2 * f(0)$ $f(2) = f(1) + 2 * f(-1)$

$f(5)$ și $f(3)$ nu se numără pentru că sunt apeluri din programul principal. Se cere numărul de autoapeluri!

12. **Răspuns corect:** c) 14

Indicații: se generează tabloul

```
1 2 3 4
5 6 7 3
8 9 6 2
10 8 5 1
```

13. **Răspuns corect:** f) 112 și 166

Indicații: $f(95) = f(1 + f(97)) = f(110) = 112$;

$f(97) = f(1 + f(99)) = f(107) = 109$;

$f(99) = f(1 + f(101)) = f(1 + 103) = f(104) = 106$;

Se observă că plecând de la $x=99$, dacă x scade cu 2, $f(x)$ crește cu 3.

Plecând de la 99 avem $99 - 59 = 40$; $40/2 = 20$; $20 * 3 = 60$; $60 + 106 = 166$ sau

Plecând de la 95 avem $95 - 59 = 36$; $36/2 = 18$; $18 * 3 = 54$; $54 + 112 = 166$

14. **Răspuns corect:** e) Cel mai mic număr de operații s-a efectuat pentru z .

Indicații: ca operații avem:

operații comune la toate tablourile:

-numărul de comparații pentru determinarea minimului este 6

-inițializarea indicelui valorii minime 3 operații

-verificare dacă minimul se află pe poziția i (ca să nu fac interschimbare cu el însuși)
3 operații

diferente:

-(d1) nr de interschimbări

-(d2) nr de actualizări ale indicelui minimului

v: $d1=3$ și $d2=3$

x: $d1=2$ și $d2=2$

y: $d1=2$ și $d2=2$

z: $d1=1$ și $d2=2$

15. **Răspuns corect:** d) divizorii primi ai lui x și numărul tuturor divizorilor lui x

EXEMPLU: pentru $x=36$ se afișează 2 3 9

Indicații: este o descompunere în factori primi care afișează divizorii primi (la prima apariție în descompunere) și returnează numărul total de divizori calculat ca produs de exponenți plus 1.

$$36=2^2 \cdot 3^2$$

numărul divizorilor este $(2+1) \cdot (2+1)=9$

Varianta 8 online

Indicații și răspunsuri

1. **Răspuns corect:** e) C++: $(a\%3+a\%7)/9$

Pascal: $(a \text{ MOD } 3+a \text{ MOD } 7) \text{ DIV } 9$

Indicații: Restul împărțirii unui număr la 3 poate fi 0, 1 sau 2. Restul împărțirii unui număr la 7 poate fi maxim 6. În concluzie, suma acestor două resturi nu poate fi mai mare de 8.

2. **Răspuns corect:** b) $v = (5, 3, 4, 8, 6, 2, 1, 9)$

Indicații: Instrucțiunile din cadrul instrucțiunii repetitive `while`

(C++: $v[i]=v[i]+v[j]; v[j]=v[i]-v[j]; v[i]=v[i]-v[j];$ sau Pascal: $v[i]:=v[i]+v[j]; v[j]:=v[i]-v[j]; v[i]:=v[i]-v[j];$) interschimbă valoarea aflată în $v[i]$ cu valoarea aflată în $v[j]$.

$i=0$	$j=1$	$v[0]=5$	$v[1]=3$
$i=2$	$j=3$	$v[2]=4$	$v[3]=8$
$i=4$	$j=5$	$v[4]=6$	$v[5]=2$
$i=6$	$j=7$	$v[6]=1$	$v[7]=9$

3. **Răspuns corect:** f) `poLiTEHnica`

Indicații: Toate literele mai mici decât litera n, în ordine alfabetică, până la poziția 7 din șirul de caractere memorat în variabila a, sunt transformate în litere mari (spre exemplu: l devine L)

4. **Răspuns corect:** d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Indicații: Cele două instrucțiuni repetitive `while` parcurg toate elementele tabloului bidimensional **A**. Elementele care respectă condiția instrucțiunii `if` ($i+j$ să fie par) sunt: $A[0][0]=0$, $A[0][2]=2$, $A[1][1]=2$, $A[1][3]=4$, $A[2][0]=2$, $A[2][2]=4$, $A[3][1]=4$ și $A[3][3]=6$.

Celelalte elemente au valoarea celui mai mare dintre indicii i și j : $A[0][1]=1$, $A[0][3]=3$, $A[1][0]=1$, $A[1][2]=2$, $A[2][1]=2$, $A[2][3]=3$, $A[3][0]=3$ și $A[3][2]=3$.

5. **Răspuns corect:** d) 11

Indicații:

Ad (3)

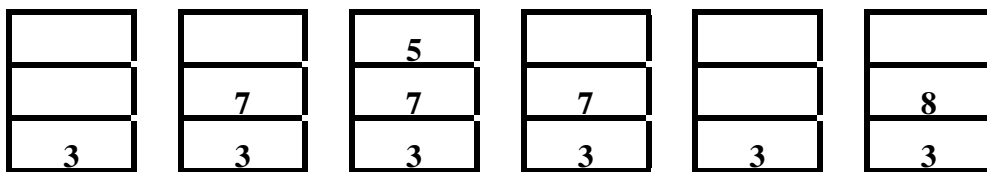
Ad (7)

Ad (5)

El ()

El ()

Ad (8)



6. **Răspuns corect:** d) 24

Indicații: 4a8b (4185, 4189, 4581, 4589, 4981, 4985) - 6 numere

8a4b - 6 numere

a4b8 - 6 numere

a8b4 - 6 numere

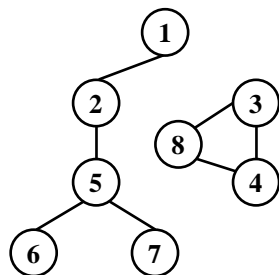
7. **Răspuns corect:** f) 2 2 2 1 1 2

Indicații: Nodul cu numărul 2 din varianta de răspuns a indică faptul că este adiacent cu 5 noduri chiar dacă gradul nodului 3 este 0. Același raționament se aplică și pentru varianta d. Într-un graf neorientat suma gradelor tuturor nodurilor trebuie să fie un număr par. Prin urmare variantele b și e sunt false. Nodul cu numărul 3 din varianta de răspuns c are gradul 7 chiar dacă graful are 6 noduri.

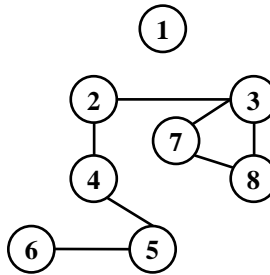
8. **Răspuns corect:** d) $T = (0 \ 5 \ 7 \ 3 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2)$

Indicații:

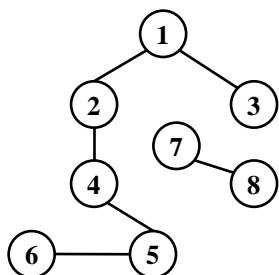
Reprezentarea grafică a variantei a:



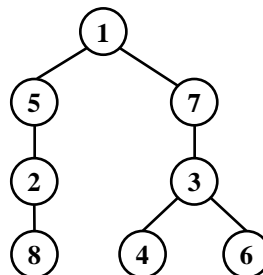
Reprezentarea grafică a variantei b:



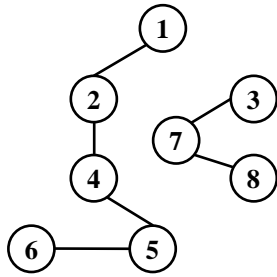
Reprezentarea grafică a variantei c:



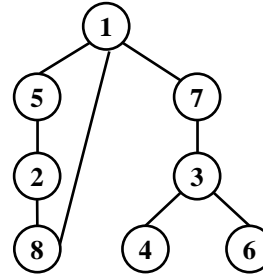
Reprezentarea grafică a variantei d:



Reprezentarea grafică a variantei e:



Reprezentarea grafică a variantei f:



9. Răspuns corect: b) a^2+1

Indicații: Cele două instrucțiuni repetitive **while** și **do... while / repeat... until** aflate în interiorul instrucțiunii **for** parcurg intervalul $[1, a]$. Instrucțiunea **while** parcurge intervalul $[1, i]$ iar instrucțiunea **do... while / repeat... until** parcurge intervalul complementar $[i+1, a]$.

Deoarece aceste instrucțiuni se află într-un **for** care parcurge același interval $[1, a]$, variabila **s** va avea valoarea a^2 . Va afișa a^2+1 deoarece instrucțiunea **do... while / repeat... until** va incrementa cu 1 variabila **s** în ultima apelare a instrucțiunii chiar dacă condiția este falsă deoarece este instrucțiune repetitivă cu test final.

Pentru C++ nu se va afișa a^2 , ci a^2+1 deoarece **s--** decrementează variabila **s** după afișare!

10. Răspuns corect: d) 53078520

Indicații: În cazul de față funcția recursivă denumită **afis** se va opri în momentul în care **k** devine 1. De menționat că, în cazul de față, **k** pornește de la valoarea 8 care este valoarea sumei indicilor lui $a[4][4]$, elementul din dreapta jos.

Valoarea variabilei **k** scade cu 2 la fiecare reapelare a funcției. Elementele se vor afișa din partea dreaptă spre cea stângă.

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

11. Răspuns corect: f) $\underbrace{f(t) \circ \dots \circ f(t)}_c$

Indicații: $\text{abc}(\text{functie}(t), c-1)$ apelează subprogramul **functie()** de **c** ori. Această apelare se face cu rezultatul primit deja de la subprogramul **functie()**, adică $f(f(x))$.

12. Răspuns corect: d) **cuei**

Indicații:

Pentru C++: A fost definit un tablou bidimensional de caractere, astfel:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	b	a	c	a	L	a	u	r	e	a	t
2	l	i	c	e	U						
3	e	x	a	m	E	n	e				
4	p	o	l	i	T	e	h	n	i	c	a

Prin urmare sunt afișate elementele:

i=1	a[1][2]='c'
i=2	a[2][4]='u'
i=3	a[3][6]='e'
i=4	a[4][8]='i'

Pentru Pascal: În comparație cu C++ unde șirul de caractere pornește de la 0, aici pornește de la 1. Prin urmare avem următoarele date:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	b	a	c	a	L	a	u	R	e	a	T
2	l	i	c	e	U						
3	e	x	a	m	E	n	e				
4	p	o	l	i	T	e	h	N	i	c	a

Următoarele elemente sunt afișate:

i=1	a[1][3]='c'
i=2	a[2][5]='u'
i=3	a[3][7]='e'
i=4	a[4][9]='i'

13. **Răspuns corect:** a) 17 5

Indicații: $m=6, n=3$ rezultă că după apelarea $f1(m, n)$ vor fi următoarele valori:

$f1(6, 3)=10, m=6, n=2$. Apelarea $f1(f1(m, n), m)$ se face, de fapt, pentru $f1(10, 6)$ care conduce la valorile $f1(10, 6)=17, m=5, n=2$.

14. **Răspuns corect:** e) $b = \begin{pmatrix} 29 & 38 & 47 \\ 38 & 50 & 62 \\ 47 & 62 & 77 \end{pmatrix}$

Indicații:

i=1	j=1	k=1	b[1][1]=4
i=1	j=1	k=2	b[1][1]=13
i=1	j=1	k=3	b[1][1]=29
i=1	j=2	k=1	b[1][2]=6
i=1	j=2	k=2	b[1][2]=18
i=1	j=2	k=3	b[1][2]=38
i=1	j=3	k=1	b[1][3]=8
i=1	j=3	k=2	b[1][3]=23
i=1	j=3	k=3	b[1][3]=47

Identic se procedează și pentru $i=2$ și $i=3$.

15. **Răspuns corect:** e) 24

Indicații: $n=4$ rezultă că variabila b din **functie** devine 12. Dacă b devine 12 rezultă că și n devine 12. Instrucțiunea $a=2*a$; atribuie lui a valoarea $2*n$ iar n este 12, adică 24.

Varianta 9 online

Indicații și răspunsuri

1. **Răspuns corect:** b) -24

Indicații: Se evaluează mai întâi rezultatul din paranteză, care este -2 , apoi se calculează câtul împărțirii lui 16 la -2 și în final acesta se înmulțește cu 3 .

2. **Răspuns corect:** b) $n / 10 \% 10$ în varianta C/C++, respectiv $n \text{ div } 10 \text{ mod } 10$ în varianta Pascal.

EXEMPLU: Pentru $n=3185$, $n/10 = n \text{ div } 10 = 318$, iar $n/10\%10 = 318\%10 = 8$, respectiv $n \text{ div } 10 \text{ mod } 10 = 318 \text{ mod } 10 = 8$.

3. **Răspuns corect:** f) La final $d1$ și $d2$ vor fi egale **doar** dacă n reține un număr pătrat perfect.

EXEMPLE: Pentru $n=11$ vom avea $d1=1$ și $d2=11$, deci $d1 \neq d2$, pentru $n=125=5^3$ vom avea $d1=5$ și $d2=25$, deci $d1 \neq d2$, pentru $n=21$ vom avea $d1=3$ și $d2=7$, , deci $d1 \neq d2$. Pentru orice pătrat perfect de forma $n=r^2$, vom avea $d1=d2=r$. De exemplu, pentru $n=36$ vom avea $d1=d2=6$.

Indicații: Algoritmul reține la final în $d1$ cel mai mare divizor al lui n al cărui pătrat e mai mic sau egal cu n , iar în $d2$ divizorul „complementar”, care înmulțit cu $d1$ dă rezultatul n . Doar în cazul pătratelor perfecte $d1=d2$.

4. **Răspuns corect:** a) `for (j = n - 2; j >= i; j--)` în varianta C/C++, respectiv `for j := n-2 downto i do` în varianta Pascal.

EXEMPLU: Dacă $n=4$ și $v=(3,2,1,4)$, la primul pas, în care $i=0$ vor fi comparate 1 și 4 , fără a fi nevoie de interschimbare, apoi 2 și 1 , care vor fi interschimbate și la final 3 și 1 , care vor fi de asemenea interschimbate. Tabloul va deveni astfel $(1,3,2,4)$. Pentru $i=1$ vor fi comparate 2 și 4 fără a fi interschimbate, apoi 3 și 2 , care vor fi interschimbate. Tabloul va deveni $(1,2,3,4)$. Pentru $i=2$ vor mai fi comparate, fără a fi interschimbate 3 și 4 .

Indicații: Algoritmul se aseamănă foarte mult cu sortarea prin metoda bulelor (Bubble Sort), constând de asemenea din parcurgeri succesive ale tabloului, în cadrul cărora sunt comparate și eventual interschimbate elemente aflate pe poziții consecutive. În cazul său însă parcurgerile se fac de la dreapta la stânga, în cadrul fiecăreia elementul minim fiind mutat în stânga subsecvenței prelucrate.

5. **Răspuns corect:** c) $f(1, n) == n$ în varianta C/C++, respectiv $f(1, n) = n$ în varianta Pascal.

Indicații: Apelul $f(d, n)$ returnează cel mai mic divizor al lui n mai mare strict ca d . În cazul în care n este prim acesta va fi n și reciproc (în enunț se garantează că n este natural, mai mare strict ca 1).

6. **Răspuns corect:** e) 36

Indicații: Un arbore cu 10 vârfuri are cu siguranță 9 muchii, iar un graf complet cu 10 vârfuri are cu siguranță $10 \cdot (10-1) / 2 = 45$ de muchii. Prin urmare, vor trebui adăugate $45-9 = 36$ de muchii.

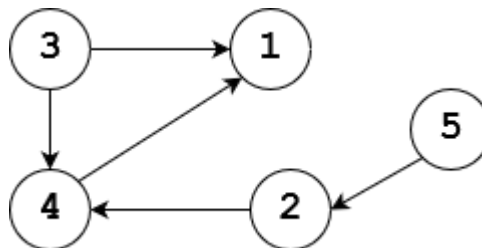
7. **Răspuns corect:** e) 65

Indicații: Secvența de instrucțiuni construiește următoarea matrice:

25	24	23	22	21
20	19	18	17	16
15	14	13	12	11
10	9	8	7	6
5	4	3	2	1

8. **Răspuns corect:** c) (2, 1, 0, 2, 0)

Indicații: Dacă numerotăm vârfurile ca în figura alăturată, vom obține șirul gradelor interne de la punctul c)



9. **Răspuns corect:** c) Algoritmul generează în ordine lexicografică anagramele cuvântului citit care nu au vocale pe poziții alăturate.

Indicații: Ordinea alfabetică a literelor din cuvintele **pilo** și **poli** este **i, l, o, p**. Prin urmare varianta a) nu are cum să fie cea corectă (este înaintea lui **pilo** în ordine invers lexicografică). Variantele b) și d) nu sunt corecte, deoarece în ambele cazuri, penultimul cuvânt generat ar fi **poil**.

10. **Răspuns corect:** a) `strcpy(t, strchr(s, ' '))`; în varianta C/C++, respectiv `t:=copy(s, pos(' ', s), 5)`; în varianta Pascal.

Indicații: Variantele b), d), e) și f) ar produce erori de compilare, iar c) ar face ca în variabila **t** să fie reținut "Politehnica 20202020".

11. **Răspuns corect:** b) 31

Indicații: Ordinea apelurilor recursive va fi: $f(24, 34) = 2 + f(25, 34) = 2 + (1 + f(26, 33)) = 3 + f(26, 31) = 3 + f(26, 29) = 3 + (1 + f(27, 28)) = 4 + f(27, 26) = 4 + 27 = 31$

12. **Răspuns corect:** f) 3

Indicații: Putem elimina muchiile {1, 3}, {3, 4} și {3, 5}. Vom avea 3 cicluri elementare: (1, 5, 6, 1), (2, 5, 6, 2) și (1, 5, 2, 6, 1).

13. **Răspuns corect:** d) 0 1 1 1 3 5

Indicații: Primii trei vectori în ordine lexicografică sunt: $(0, 1, 1, 1, 2, 5)$, $(0, 1, 1, 1, 3, 5)$ și $(0, 1, 1, 1, 4, 5)$. Vectorul $(0, 1, 2, 3, 1, 1)$ nu este al doilea, $(0, 1, 1, 1, 1, 3)$ corespunde unui arbore cu înălțimea 2, iar $(0, 1, 1, 1, 2, 6)$ nu corespunde unui arbore (6 nu poate fi propriul său tată).

14. **Răspuns corect:** b) $m * m \geq x$

EXEMPLU: Dacă $x=30$ și apelurile subprogramului sunt următoarele (făcând observația că rezultatul dorit nu poate fi mai mare ca x): $\text{rad}(1, 30, 30) = \text{rad}(1, 15, 30) = \text{rad}(1, 8, 30) = \text{rad}(5, 8, 30) = \text{rad}(6, 8, 30) = \text{rad}(6, 7, 30) = \text{rad}(6, 6, 30) = 6$

Indicații: Subprogramul folosește o versiune modificată a căutării binare pentru a obține rezultatul dorit. Astfel dacă elementul din mijlocul intervalului în care se caută rezultatul are proprietatea dorită (pătratul său e mai mare sau egal cu x), căutarea continuă în prima jumătate, altfel în cea de-a doua.

15. **Răspuns corect:** d) $s -= v[j]$; în varianta C/C++, respectiv $s := s - v[j]$; în varianta Pascal.

EXEMPLU: Dacă $n=8$, $v=(3, 5, 4, 1, 2, 8, 19, 3)$ și $t=10$ atunci l_{\max} va avea la sfârșitul executării secvenței de instrucțiuni valoarea 3. Mai precis pentru $i=0$ se va găsi $j=0$, pentru $i=1$ se va găsi de asemenea $j=0$, deoarece suma primelor 2 elemente ale tabloului nu depășește $t=10$, pentru $i=2$ se va găsi $j=1$, deoarece suma primelor 3 elemente depășește t , dar $v[1]+v[2] \leq t$, pentru $i=3$ se va găsi $j=1$, pentru $i=4$ se va găsi $j=2$, pentru $i=5$ se va găsi $j=4$, pentru $i=6$ se va găsi $j=7$, pentru $i=7$ se va găsi $j=7$,

Indicații: Pentru fiecare i cuprins între 0 și $n-1$, algoritmul determină în timp liniar cel mai mare j cu proprietatea că subsecvența de la poziția i până la poziția j inclusiv respectă restricția de a avea suma mai mică sau egală cu t . Pentru verificarea acestei condiții este păstrată în permanență în variabila s suma elementelor din subsecvența curentă. Incrementarea lui j este echivalentă cu eliminarea lui $v[j]$ din subsecvență, prin urmare este necesar ca s să scadă cu $v[j]$.

Varianta 10 online

Indicații și răspunsuri

1. **Răspuns corect:** c) $(n-1)/2$

EXEMPLU: Pentru $n=7$ și tabloul unidimensional (4 2 3 1 6 8 5) se obține tabloul (5 8 6 1 3 2 4).

Indicații: Elementul de pe poziția din mijloc nu este necesar să fie mutat. Se interschimbă 4 cu 5, 2 cu 8 și 3 cu 6, 3 interschimbări, adică se fac $(n-1)/2$ interschimbări.

2. **Răspuns corect:** b) (1 15 102 18 91)

Indicații: Se mută al treilea element spre stânga cu 2 poziții ș.a.m.d. Primele 2 elemente se mută în aceeași ordine la sfârșit.

3. **EXEMPLU:**

	x		
			x
x			
		x	

Răspuns corect: c) 3 1 4 2

Indicații: Două dame nu se atacă între ele dacă nu se află pe aceeași coloană, pe aceeași diagonală sau pe același rând. Astfel așezarea lor poate fi: dama 1 pe rândul 3, dama 2 pe rândul 1, dama 3 pe rândul 4, dama 4 pe rândul 2.

4. **Răspuns corect:** b) 10

EXEMPLU: Pentru tabloul unidimensional (10 24 9 11 33 7 15) se fac următoarele interschimbări:

Pasul 1: (10 9 11 24 7 15 33): 4 interschimbări

Pasul 2: (9 10 11 7 15 24 33): 3 interschimbări

Pasul 3: (9 10 7 11 15 24 33): 1 interschimbare

Pasul 4: (9 7 10 11 15 24 33): 1 interschimbare

Pasul 5: (7 9 10 11 15 24 33): 1 interschimbare

Indicații: O interschimbare se face dacă sunt îndeplinite simultan condițiile $v[i] > v[j]$ și $i < j$.

5. **Răspuns corect:** f) 26789 34567 34568 34569 34578

Indicații:

a) 45678 45679 45689 45789 46789 56789 – lipsește numărul subliniat

b) 34789 35678 35679 35689 36789 45678 – lipsește numărul subliniat

c) 34578 34569 34568 34567 26789 – nu sunt în ordine crescătoare

d) 13458 13459 13467 13469 13478 13479 – lipsește numărul subliniat

e) 13458 13459 13467 13468 13469 – numărul subliniat are mai mult de 2 cifre alăturate de aceeași paritate

6. **Răspuns corect:** c) 2349

Indicații: Subprogramul parcurge recursiv cele două numere **a** și **b** și returnează un număr format cu cifra mai mare de pe aceeași poziție din cele două numere.

7. **Răspuns corect:** d) 3

Indicații: Numărul minim de comparații se obține folosind algoritmul de căutare binară. Comparația 1: elementul din mijloc: **73**; Comparația 2: elementul din mijloc: **95**; Comparația 3: elementul din mijloc: **82**;

8. **Răspuns corect:** e) nedefinită

Indicații: Este o variabilă locală neinițializată.

9. **Răspuns corect:** b) 190

Indicații: În total sunt **400** de elemente, **20** sunt pe diagonala secundară.

10. **Răspuns corect:** d) 1023

EXEMPLU: Fie cele 3 tije **a**, **b** și **c**. Se mută discurile de pe tija **a** pe tija **b**, utilizând ca tijă intermediară tija **c**. Pentru **k=3** discuri se fac **7** mutări: **a→b**, **a→c**, **b→c**, **a→b**, **c→a**, **c→b**, **a→b**.

Indicații: Pentru **k** discuri este necesar un număr de $2^k - 1$ mutări.

11. **Răspuns corect:** c) 8

Indicații: Graful nu conține bucle. Fiecare vârf este adiacent cu toate celelalte vârfuri. Dacă graful are **n** vârfuri există $n(n-1)$ arce. $56 = n(n-1)$, $n=8$.

12. **Răspuns corect:** f) Doi dintre algoritmi nu diferă ca eficiență din punctul de vedere al timpului de executare.

Indicații:

a) Algoritmii A_1 și A_2 rezolvă problema pentru orice date de intrare cu valorile din interval.

b) Algoritmii A_2 este cel mai eficient din punctul de vedere al timpului de executare. Are complexitatea $O(n)$ pentru parcurgerea șirului și determinarea sumei.

c) Algoritmii A_4 are complexitate dată de o sortare rapidă, $O(n \log n)$.

d) Algoritmii A_4 rezolvă problema.

e) Algoritmii rezolvă problema pentru orice date de intrare cu valorile din interval.

f) A_3 și A_4 au aceeași eficiență, complexitate dată de o sortare rapidă, $O(n \log n)$.

Observație: Există algoritmi care rezolvă această problemă într-un timp mai scurt (folosind operații pe biți).

13. **Răspuns corect:** f) E_1 , E_2 și E_3

14. **Răspuns corect:** c) 5040

EXEMPLU: Anagramele (nu neapărat în această ordine) sunt: **aaccerrt**, **aaccetr**, **aaccetrr**, ..., **rtreccaa**, **trreccaa**. În total **5040**.

Indicații: Litera **a** apare de două ori, litera **c** apare de două ori, litera **e** apare o dată, litera **r** apare de două ori, litera **t** apare o dată; permutările sunt cu repetiție.

Numărul permutărilor este: $8! / (2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!)$

15. **Răspuns corect:** b) doar formula 1

Indicații:

Formula 1 poate fi obținută din ecuația

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Claculăm determinantul: $(-1)^n = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2$.

Știm că $M^m \cdot M^n = M^{m+n}$, pentru orice matrice M pătratică.

Așadar $(-1)^m = F_{m+1} \cdot F_{m-1} - F_m^2$.

$$M^m = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$M^{m+n} = \begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M^m \cdot M^n &= \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_{m+1} \cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_n & F_{m+1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n-1} \\ F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n & F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1} \end{pmatrix} = M^{m+n} = \\ &= \begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Identificăm:

$$F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n = F_{m+n} \quad (a)$$

$$F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1} = F_{m+n-1} \quad (b)$$

Punem $m = n$

$$F_n \cdot F_{n+1} + F_{n-1} \cdot F_n = F_{2n} \quad (a)$$

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1} \quad (b)$$

Din relația (a) rezultă

$$F_{2n} = F_n \cdot (F_{n+1} + F_{n-1}) = F_n \cdot (F_{n-1} + F_n + F_{n-1}) = F_n \cdot (2 \cdot F_{n-1} + F_n).$$

Așadar:

Dacă n este par, înjumătățindu-l, rezultă:

$$F(n) = F\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left[2 \cdot F\left(\frac{n}{2} - 1\right) + F\left(\frac{n}{2}\right)\right].$$

Dacă n este impar, din (b), rezultă:

$$F(n) = \left[F\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2 + \left[F\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2.$$

Termeni, conform formulelor, sunt:

1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Referitor la formulele **2** și **3**, corect este: $F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$